INT Management 2003

L'énoncé comporte deux problèmes indépendants. Ils doivent être rédigés sur des copies séparées

PROBLÈME I

La partie I et les questions 1 et 2 de la partie II sont indépendantes.

PARTIE I

Pour tout couple (a, b) de réels strictement positifs, on définit les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_0 = a,\ b_0 = b \text{ puis } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \text{ et } b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

Question 1

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$. $a_n \leq b_n$.

b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont monotones.

c) Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

Question 2

On note L l'application qui à tout couple (a, b) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ associe la limite commune des deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $L(a, b) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

a) Déterminer $L(a, a)$ pour tout $a > 0$.
Pour tout $a > 0$, tout $b > 0$ et tout $\lambda > 0$, exprimer $L(b, a)$ et $L(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $L(a, b)$.

b) On suppose $a < b$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $c_{n-1} \in]a_{n-1}, b_{n-1}[$ tel que $b_n - a_n = \dfrac{1}{8c_{n-1}}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right)^2$.

En déduire que $\dfrac{1}{8b}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right)^2 \leq b_n - a_n \leq \dfrac{1}{8a}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right)^2$.

c) Expliciter finalement une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que

$$\forall a > 0,\ \forall b > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\left(8\max(a, b)\right)^{\varepsilon_n - 1}}|b - a|^{\varepsilon_n} \leq |b_n - a_n| \leq \frac{1}{\left(8\min(a, b)\right)^{\varepsilon_n - 1}}|b - a|^{\varepsilon_n}.$$

d) On suppose $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 1$.

Quelle majoration simple obtient-on pour $b_3 - a_3$, $b_4 - a_4$?
(on rappelle que $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$.)
Que pensez-vous de la vitesse de convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

PARTIE II

Pour tout couple (a,b) de réels strictement positifs, on pose :

$$F(a,b)=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}}$$

Question 1

a) Comparer $F(a,b)$ et $F(b,a)$ et pour tout $\lambda>0$ exprimer $F(\lambda a,\lambda b)$ en fonction de $F(a,b)$.

b) Pour tout $x>0$, on pose $f(x)=F(1,x)$. Montrer que f est continue et monotone sur $\mathbb{R}_+^*$

c) Exprimer $F(a,b)$ en fonction de $f\left(\frac{b}{a}\right)$. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$.

Question 2

On suppose $a<b$.

a) A l'aide du changement de variable défini par $u=\varphi(t)=\sqrt{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}$ montrer que :

$$F(a,b)=\int_a^b\frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}$$

b) Pour tout $u\in[a,b]$ on pose $h(u)=\frac{1}{2}\left(u+\frac{ab}{u}\right)$.

Étudier les variations de h sur $[a,b]$ et tracer sa représentation graphique.

c) Déterminer l'unique réel c appartenant à $[a,b]$ tel que les restrictions h_1 et h_2 de h à $[a,c]$ et à $[c,b]$ admettent chacune une fonction réciproque.
Expliciter h_1^{-1} et h_2^{-1} et donner leurs tableaux de variations.

d) On pose $v=h(u)$. Montrer que $\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}=2u\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-v^2}$.

Montrer que $F(a,b)=F\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)$. (On pensera à écrire $]a,b[=]a,c]\cup[c,b[$)

Question 3

a) Montrer que pour tout (a,b) de $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ et tout $n\in\mathbb{N}$, $F(a,b)=F(a_n,b_n)$.

b) Montrer finalement que $F(a,b)=\frac{\pi}{2L(a,b)}$.

c) On suppose de nouveau $a=\frac{1}{2}$ et $b=1$. Montrer que $\frac{\pi}{2b_4}$ et $\frac{\pi}{2a_4}$ sont des valeurs approchées par défaut et par excès de $F(a,b)$ à moins de 10^{-13} près.

PROBLÈME II

Dans tout ce problème E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. id_E désigne l'application identité de E.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_p[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à p sur $\mathbb{K}$.
Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on définit φ^k par $\varphi^k = \mathrm{id}_E$ si $k = 0$, $\varphi^k = \varphi \circ \varphi^{k-1}$ sinon.
Plus généralement, pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, on pose $P(\varphi) = a_0\mathrm{id}_E + a_1\varphi + \cdots + a_p\varphi^p$ quand P est défini $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$.
Enfin, pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, on appelle commutant de φ et on note $C(\varphi)$ l'ensemble $\{f \in \mathcal{L}(E)/f \circ \varphi = \varphi \circ f\}$ et $\mathbb{K}[\varphi]$ l'ensemble $\{f \in \mathcal{L}(E)/\exists P \in \mathbb{K}[X],\ f = P(\varphi)\}$.

Question 1

a) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'application G de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par :
$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ G(f) = f \circ \varphi - \varphi \circ f \text{ est linéaire.}$$
En déduire que $C(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que $\mathbb{K}[\varphi]$ est inclus dans $C(\varphi)$. G est-elle injective ?

c) On suppose que φ est un automorphisme de E. Comparer $C(\varphi)$ et $C(\varphi^{-1})$.

d) Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $C(\varphi) \subset C(\varphi^p)$.
Donner un exemple où cette inclusion est stricte avec $n = p = 2$.

Question 2

On suppose ici que $n = 3$ et que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.
Déterminer $C(\varphi)$ et donner sa dimension dans les cas suivants :

a) La matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq \beta$.

b) La matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 3

Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base de E. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $f_{i,j}$ l'endomorphisme de E défini par $f_{i,j}(u_j) = u_i$ et $f_{i,j}(u_k) = 0_E$ si $k \neq j$. On note $U_{i,j}$ la matrice de $f_{i,j}$ dans $\mathcal{B}$.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{l,c})_{(l,c)\in[\![1,n]\!]^2}$ sa matrice dans $\mathcal{B}$.

a) Calculer $U_{i,j}A$ et $AU_{i,j}$.

b) En déduire que $C(\varphi) = \mathcal{L}(E)$ si et seulement si φ est une homothétie.

Question 4

On dit qu'un endomomorphisme φ de E est cyclique s'il existe u dans E tel que $\mathcal{B} = (u, \varphi(u), \ldots, \varphi^{n-1}(u))$ soit une base de E. On dit alors que u est générateur de E par φ.

a) Soient φ un endomorphisme cyclique de E et u un générateur de E par φ.
Montrer que $(\mathrm{id}_E, \varphi, \ldots, \varphi^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.
Soient f dans $C(\varphi)$ et $f(u) = a_0u + a_1\varphi(u) + \cdots a_{n-1}\varphi^{n-1}(u)$ la décomposition de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$.

On pose $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots a_{n-1} X^{n-1}$. Montrer que $f = P(\varphi)$.
En déduire que $C(\varphi) = \mathbb{K}_{n-1}[\varphi] = \mathbb{K}[\varphi]$.

b) On suppose que E est de dimension 2. Montrer qu'un endomorphisme de E est soit une homothétie, soit un endomorphisme cyclique.

c) On suppose que l'endomorphisme φ admet n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Soit $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base de vecteurs propres associés. On pose $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Montrer que u est un générateur de E par φ et donc que φ est cyclique.
On pourra supposer que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ *sont tels que* $a_0 u + a_1 \varphi(u) + \cdots a_{n-1}\varphi^{n-1}(u) = 0$ *et poser* $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots a_{n-1} X^{n-1}$
Quelle est la dimension de $C(\varphi)$?

d) On suppose que φ est un endomorphisme diagonalisable admettant k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
Montrer que $(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ \ldots \circ (\varphi - \lambda_k \mathrm{id}_E)$ est l'endomorphisme nul.
En déduire que si φ est un endomorphisme cyclique et diagonalisable, il admet n valeurs propres distinctes.

e) On suppose que φ est nilpotent d'ordre n, c'est à dire que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$.
Montrer que φ est cyclique.

Question 5

Dans cette question $E = \mathbb{R}_p[X]$ de dimension $n = p + 1$.
On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}_p[X]$, $D(P) = P'$ où P' est le polynôme dérivé de P.
On suppose que $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sont $p + 1$ réels distincts.

a) Montrer que D est cyclique. En déduire que $\mathcal{C} = \left(\mathrm{id}_E, D, \frac{D^2}{2!}, \ldots, \frac{D^p}{p!}\right)$ est une base de $C(D)$.
Préciser l'ensemble $\mathcal{G}$ des polynômes qui sont des générateurs de $\mathbb{R}_p[X]$ par D.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit T_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}_p[X]$, $T_a(P(X)) = P(X+a)$.
Montrer que pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$, T_a appartient à $C(D)$.
Quelles sont les composantes de T_a dans $\mathcal{C}$?

c) Soit Θ l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}_p[X]$, $\Theta(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots P(a_p))$
Montrer que Θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$.
En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^p \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^p \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_p & a_p^2 & \ldots & a_p^p \end{pmatrix}$ est inversible.

d) Montrer que $(T_{a_0}, T_{a_1}, \ldots, T_{a_p})$ est une base de $C(D)$